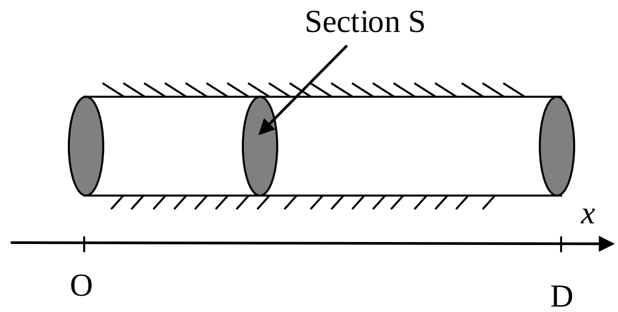
TD 12 : transferts thermiques

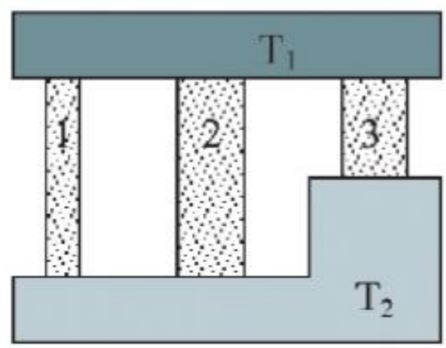
Exercice 1 : flux thermique dans une barre



Une barre cylindrique homogène, de masse volumique ρ, de capacité thermique massique c, de conductivité thermique λ, a une longueur D et une section droite S. Ses parois latérales sont parfaitement calorifugées par un isolant thermique de telle sorte que les pertes thermiques sont négligées. En revanche, chaque extrémité de la barre, en $x = 0$ et $x = D$, est en contact avec deux thermostats, respectivement TH_1 et TH_2, qui imposent la température aux limites :
$T_0 = T(x=0)$ et $T_D = T(x=D)$.

1. Rappeler la loi de Fourier en notant $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(x,t)\overrightarrow{u_x}$ le vecteur densité de courant thermique dans la barre.
2. Effectuer un bilan local d'énergie sur une tranche élémentaire du conducteur, comprise entre x et $x + dx$.
3. En déduire l'équation aux dérivées partielles de diffusion thermique vérifiée par la température $T(x,t)$ soit $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D_{th}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (équation I). Expliciter D_{th} et donner son unité.
4. Dans ce qui suit, il est rappelé que les deux thermostats ont des capacités thermiques infinies et que leur température est stationnaire. Que devient l'équation de diffusion thermique ? En déduire la distribution de température $T(x)$ dans la barre en régime permanent (on a $T_0 > T_D$).
5. Calculer la résistance thermique R_{th} de la barre métallique en fonction de λ, D et S.
6. Que se passe-t-il si on enlève la protection calorifugée ? L'équation I reste-t-elle valable ? Que faut-il introduire ?

Exercice 2 : Propagation dans un matériau



1. Rappeler la définition de la résistance thermique.
2. Rappeler la résistance thermique d'un matériau de section S, de longueur L et de conductivité λ.

3. Deux thermostats de températures T_1 et T_2 sont reliés (schéma ci-contre) par 3 barres de cuivre de longueurs $L_1 = L_2 = 2L_3 = 2L$ et de sections $S_3 = S_2 = 4S_1$.
   Que peut-on dire des flux thermiques Φ_1, Φ_2 et Φ_3 traversant chacune des barres, sachant que $T_1 > T_2$?

Exercice 3 : Evaluation de la durée d'un régime transitoire

1. Rappeler l'équation de diffusion thermique pour un milieu sans source thermique.

2. Calculer l'ordre de grandeur de la durée d'établissement du régime permettant l'établissement du régime permanent pour une tige d'acier homogène de longueur L, de section droite circulaire de rayon a, de masse m, de capacité thermique massique c.

Données numériques : a = 1 cm ; L = 50 cm ; c = 0,46 kJ.kg^{-1}.K^{-1} ; m = 1,24 kg ; $\lambda_{acier} \approx$ 82 W.m^{-1}.K^{-1}

3. Quelle est cette durée si la longueur de la tige double ?

4. Conclure.

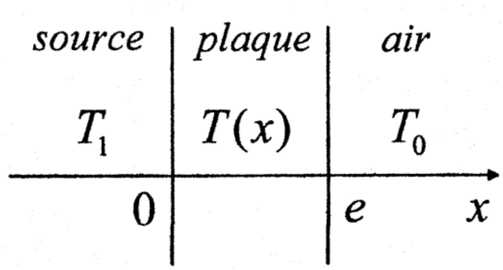
Exercice 4 : Simple vitrage et double vitrage thermique

On considère une vitre considérée comme un système unidimensionnel suivant la normale à sa surface considéré comme l'axe Ox. On néglige les effets conducto – convectifs.

1. Faire un tableau d'analogie entre les grandeurs électriques et les grandeurs thermiques.
2. Calculer la résistance thermique d'une vitre carré de côté a = 1,0 m, d'épaisseur e = 5,0 mm. On donne la conductivité thermique du verre : λ_{verre} = 1,0 W.m^{-1}.K^{-1}
3. On s'intéresse désormais à un double vitrage carré de côté a = 1,0 m. Ce double vitrage est constitué de 3 milieux consécutifs de même épaisseur e = 5,0 mm. Les milieux extrêmes sont en verre de conductivité thermique λ_{verre} = 1,0 W.m^{-1}.K^{-1}. Entre les deux plaques de verre, on emprisonne de l'air de conductivité thermique égale à λ_{air} = 2,6 10^{-2} W.m^{-1}.K^{-1}. Calculer la résistance thermique de l'ensemble.
4. Quelle est l'analogie électrique avec cette situation ?
5. Conclure quant à l'utilisation de tels dispositifs.
6. Déterminer qualitativement le profil de température dans le double vitrage suivant l'axe Ox.

Exercice 5 : Resistance thermique d'une paroi soumise aux effets conducto - convectifs

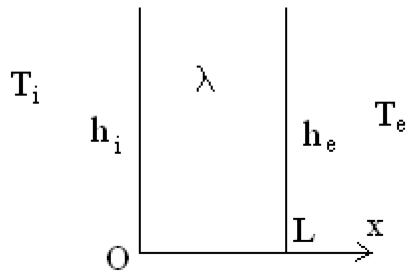
Une source thermique, qui maintient une température constante et uniforme T_1, occupe l'espace $x < 0$; elle est séparée de l'air ambiant à la température $T_0 < T_1$ (pour $x > e$) par une plaque d'épaisseur e constituée d'un matériau de conductivité thermique λ. La plaque se refroidit par convection au contact de l'air, le coefficient de convection est h (en W.m^{-2}.K^{-1}).

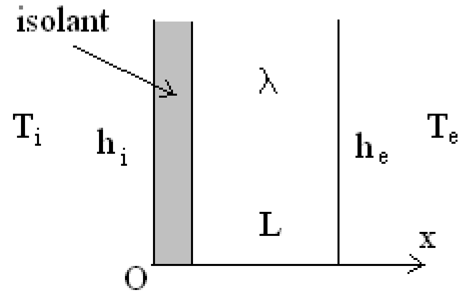


On considère uniquement le régime permanent (aucune température ne dépend du temps), le problème est à une seule dimension x (pas d'effet de bord) et les échanges en $x = 0$ et $x = e$ sont limités à une surface transversale S.

1. Donner le profil de température $T(x)$ dans la plaque.
2. Après avoir rappelé la loi de Newton donnant j_{th} en $x = e$ entre la plaque et l'air, déterminer l'expression de la température de surface $T(e)$ de la plaque en fonction de T_0, T_1, λ, h et e. Écrire ensuite j_{th} en fonction des mêmes données, et en déduire l'expression de la résistance thermique R_{th} équivalente ; la commenter.
3. Examiner les deux cas limites suivant la valeur du rapport he / λ, préciser dans chaque cas les conditions physiques, donner la valeur de T(e), de la puissance thermique totale de refroidissement, et proposer un exemple simple de la vie courante.

Exercice 6 : Isolation thermique d'un mur d'une habitation



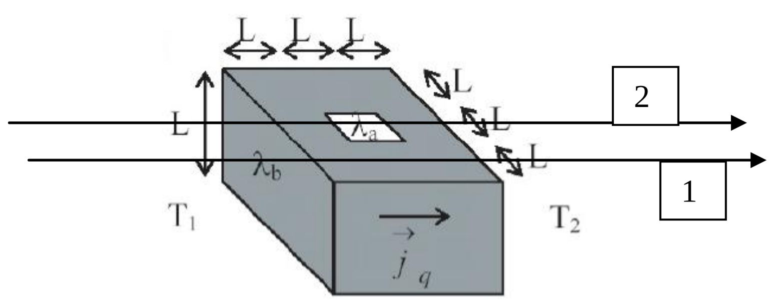


On considère un mur extérieur (surface S) d'une maison. Ce mur d'épaisseur L = 40 cm est en pierre de conductivité thermique λ = 2,0 $W.m^{-1}.K^{-1}$
La température intérieure est T_i = 20 °C, celle extérieure est Te = 0°C, le coefficient d'échanges conducto – convectif intérieur est h_i = 9,0 $W.m^{-2}.K^{-1}$, celui extérieur est h_e = 17,0 $W.m^{-1}.K^{-1}$.

1. Calculer le flux de chaleur Φ / S surfacique échangé à travers le mur, les températures de parois intérieur et extérieur T_{pi} et T_{pe}.
2. On place contre le mur à l'intérieur un isolant d'épaisseur e = 7,5 cm et de conductivité λ' = 0,4 $W.m^{-1}.K^{-1}$. Calculer le flux de chaleur Φ' / S surfacique échangé à travers le mur composite, les températures de parois intérieur et extérieur T'_{pi} et T'_{pe} ainsi que la température $_{Ts}$ à la séparation isolant-mur en pierre.
3. L'isolant est maintenant placé contre le mur extérieur. Mêmes questions qu'en **2**.
4. Faire une analyse quantitative et qualitative des résultats trouvés en **1**, **2** et **3**.

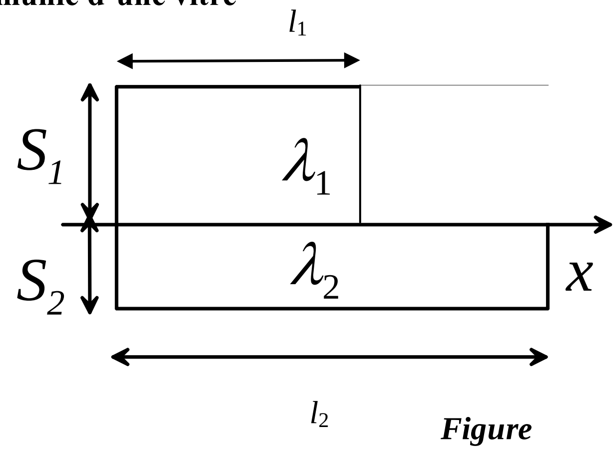
Exercice 6 : Calcul de la résistance thermique d'une brique

Une brique de construction est modélisée par le schéma ci-dessus. Elle est réalisée en matériau de conductivité thermique λ_b et l'air qu'elle contient a la conductivité thermique λ_a.



1. Montrer que la résistance thermique R_1 associée à la propagation (1) dans 3 épaisseur L de matériau vaut : $R_1 = \frac{1}{\lambda_b}\frac{3}{L}$.
2. Montrer que la résistance thermique R_2 associée à la propagation (3) dans 2 épaisseur L de matériau et une épaisseur L d'air vaut : $R_2 = \frac{1}{\lambda_b}\frac{2}{L} + \frac{1}{\lambda_a}\frac{1}{L}$.
3. En déduire l'expression de la résistance thermique de la brique entière.
4. Estimer la puissance thermique la traversant en fonction des résistances thermiques R_1 et R_2

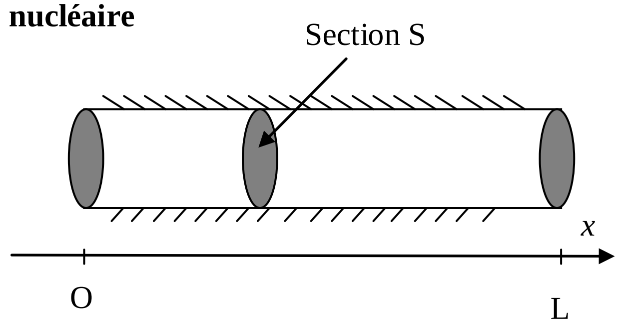
Exercice 7 : Calcul de résistance thermique d'une paroi munie d'une vitre



Figure

1. Calculer la résistance thermique équivalente du dispositif schématisé ci-contre. Pour répondre à cette question, on s'efforcera de faire apparaître les résistances thermiques R_1 et R_2 de chaque partie du dispositif.
2. Quelle est l'analogie électrique d'un tel dispositif ?
3. Que se passe-t-il si $R_1 >> R_2$? Analogies ?
4. Application :
   calculer la résistance thermique d'une paroi de hauteur constitué d'une vitre de coté a =1 m, d'épaisseur l_1 =1 cm , la complément est constitué de béton avec la paroi totale faisant une hauteur de h = 3 m et de coté a = 1 m , d'épaisseur l_2 = 20 e = 20 cm.
   On donne : λ_{beton} = = 2,0 W.m^{-1}.K^{-1} et λ_{verre} = 1,0 W.m^{-1}.K^{-1}

Exercice 8 : Température dans une barre de combustible nucléaire



Une barre cylindrique homogène, de combustible nucléaire retraité dans une piscine d'eau. La barre a une longueur L = 50 cm et une section droite S = 10 cm^2. Elle est de masse volumique ρ =20 t.m^{-3}, de capacité thermique massique $c = 6\ kJ.K^{-1}.kg^{-1}$, et de conductivité thermique λ = 30 W.m^{-1}.K^{-1}, Les transferts thermiques sont imposés par la conductivité du matériau. On pourra donc supposer que ses parois latérales sont parfaitement calorifugées de telle sorte que les pertes thermiques latérales sont négligées.
En revanche, chaque extrémité de la barre, en x = 0 et x = L, est en placé dans une piscine d'eau qui impose une température $T_0 = T(x= 0)$ et $T_0 = T(x=L)$ aux extrémités. On prendra $T_0 = 30°C$.

Le barreau de combustible est siège de réactions nucléaires qui fournissent une puissance thermique par unité de volume égale à p = 400 W.cm^{-3}.
On donne la température de fusion du matériau correspondant au combustible nucléaire MOX (alliage de divers métaux et d'oxyde d'Uranium : T_f = 2900°C).

1. Rappeler la loi de Fourier en notant $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(x,t)\overrightarrow{u_x}$ le vecteur densité de courant thermique dans la barre.
2. En tenant compte de la puissance volumique fournie, effectuer un bilan local d'énergie sur une tranche élémentaire du conducteur, comprise entre x et $x + dx$.
3. En déduire l'équation de diffusion thermique avec source vérifiée par la température $T(x,t)$:
   $\frac{\partial T}{\partial t} - D_{th}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = A$ (équation I).
4. Expliciter D_{th} et A. Donner leurs unités.
5. On se place en régime stationnaire. Que devient l'équation de diffusion thermique ?
6. En déduire le champ de température $T(x)$ dans la barre de combustible nucléaire en régime permanent.
7. Que doit-on éviter dans la piscine de retraitement ? Cette précaution est-elle effective dans le cas de figure décrit par l'exercice ?
8. Critiquer la modélisation.

Exercice 9 : La sensation de chaud ou de froid

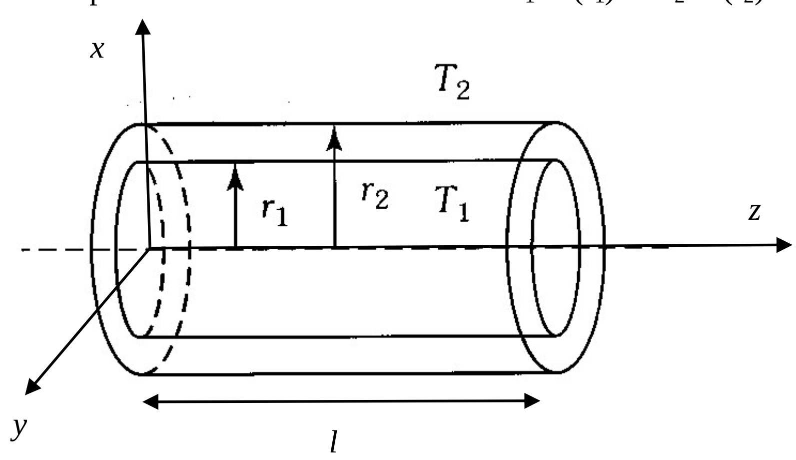
Tout l'exercice est à une dimension : x et les transferts thermiques sont purement conductifs. On s'intéresse à deux cylindres (1 en $x \in [-L, 0]$ et 2 en $x \in [0,+L]$), de mêmes longueurs L, de masses volumiques respectives ρ_1 et ρ_2, de capacités calorifiques massiques respectives c_1 et c_2, de conductivités thermiques respectives λ_1 et λ_2, thermostatés à leurs extrémités ($T(-L, t) = T_1$ et $T(+L,t) = T_2$), en contact en $x = 0$.

Données : $\lambda_{main} \approx 10$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $\lambda_{bois} \approx 1$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $\lambda_{acier} \approx 100$ W.m^{-1}.K^{-1} ; $\lambda_{cuivre} \approx 400$ W.m^{-1}.K^{-1}

1. Rappeler l'équation de diffusion thermique.
2. Donner l'expression de la température en régime permanent. Exprimer en particulier T_0, la température en $x = 0$.
3. Application à la sensation de chaud et de froid :
On suppose que le cylindre 2 est une main, et $T_2 = 37$ °C. L'autre cylindre est un objet touché par la main. On imagine que la sensation de chaud ou de froid ressentie par la main est reliée à la température au point de contact $x = 0$.
a. Discuter cette modélisation.
b. Un bout de bois semble-t-il chaud ou froid, si le bout de bois est à $T_1 = 20$ °C ? Et si $T_1 = 60$ °C ?
c. Un bout de tige d'acier semble-t-il chaud ou froid, si le bout est à $T_1 = 20$ °C ? Et si $T_1 = 60$ °C ?
4. Application à la cuisine : sachant que la conductivité thermique des aliments de cuisson est sensiblement égale à celle des tissus biologiques humain, expliquer pourquoi :
a. on utilise des ustensiles en bois pour remuer les aliments de cuisson.
b. on utilise des casseroles en cuivre pour faire chauffer les aliments.

Exercice 10 : Résistance thermique d'un tube cylindrique de cuivre

Considérons un tube cylindrique d'axe Oz, de rayon intérieur r_1 de rayon extérieur r_2 et de très grande longueur l (figure 1) devant r_1 et r_2 .
Le tube est réalisé dans un matériau de conductivité thermique notée λ .
Les températures de surface sont notées $T_1=T(r_1)$ et $T_2=T(r_2)$.



1. Dans le cas général, rappeler la loi de Fourier qui relie le vecteur densité de courant thermique, noté $\overrightarrow{j_{th}}$, au gradient de la température. Pourquoi la conductivité thermique, telle qu'elle apparaît dans la loi de Fourier, est-elle toujours positive ?
2. On repère un point $M(r,\theta,z)$ dans le système des coordonnées cylindro-polaire d'axe Oz. Introduire sur le schéma le système des coordonnées cylindro-polaire d'axe Oz. Représenter la base locale.

3. A partir d'argument de symétrie, préciser la direction du vecteur $\overrightarrow{j_{th}}$ dans le tube dans ce système de coordonnées.

4. Le système est en régime permanent : montrer que la température $T(r)$ en un point M du tube ne dépend donc que de r, la distance de M à l'axe (coordonnées cylindriques).

5. Exprimer la puissance ou flux thermique $P_{th} = \Phi_{th}$ sortant d'un cylindre de rayon r ($r_1 < r < r_2$) et de longueur l, en fonction de $j_{th}(r)$ et r.

6. En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un système correctement choisi, montrer que la puissance thermique $P_{th} = \Phi_{th}$ est indépendante de r.

7. En déduire l'expression de la température $T(r)$ en fonction de P_{th}, r, R_1, λ, T_1 et l.

8. En déduire l'expression de la résistance thermique R_{th} . Exprimer R_{th} en fonction de λ, l , r_1 et r_2 .

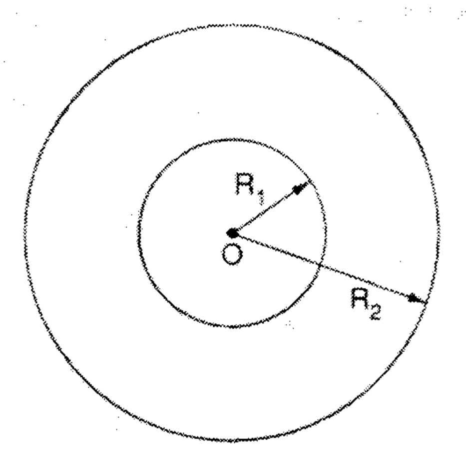
9. Calculer R_{th} pour un tube de cuivre de longueur l = 1 m. On donne les rayons r_1 = 5,0 mm et r_2 = 6,0 mm. On donne la conductivité thermique λ = 0,40 kW.m^{-1}.K^{-1}.

10. Evaluer les pertes thermiques $P_{th} = \Phi_{th}$ pour une canalisation en cuivre d'eau chaude où circule un fluide à très faible vitesse à la température de 40 °C. On supposera la canalisation d'eau chaude située dans un environnement à température à 20 °C.

11. Quelles sont les pertes thermiques si la température de l'environnement est de 0°C ? Que peut-on faire pour y remédier ?

Exercice 11 : Conduction entre deux sphères

Soient deux sphères concentriques (S_1) et (S_2) de centre commun désigné par O, de rayons R_1 et R_2, avec $R_1 < R_2$, portées respectivement aux températures T_1 et T_2 , toutes deux constantes, avec $T_1 > T_2$. L'espace compris entre (S_1) et (S_2) est rempli d'un matériau ne comportant pas de sources d'énergies. On appelle résistance thermique le rapport : $R_{th} = \dfrac{T_1 - T_2}{\Phi}$, avec Φ le flux de chaleur traversant le conducteur (M). On désigne par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le rayon vecteur partant du centre des deux sphères.



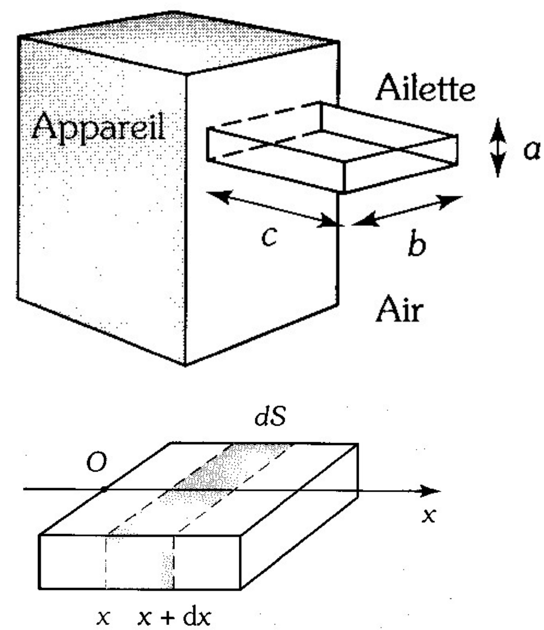
1. De combien de paramètre(s), le champ de température $T(\vec{r})$ dépend-il dans l'espace compris entre les deux sphères ?
2. À partir d'un bilan local d'énergie déterminer l'équation différentielle vérifiée par le champ de température.
3. Donner l'expression de la température dans le milieu conducteur.
4. Tracer l'évolution de la température en fonction du rayon r dans le milieu compris entre R_1 et R_2.
5. Calculer la résistance thermique R_{th} .
6. Quelle est la puissance thermique P dissipée à travers le dispositif ?
7. Application : On considère une sphère métallique de 1 cm de rayon portée à 100 °C entourée d'une couche épaisse de laine de verre de conductivité thermique égale à λ = 4,0 10^{-2} W.m^{-1}.K^{-1} et de température 20°C. Calculer les valeurs numériques de R_{th} et P pour ce dispositif.

Exercice 12 : Bilan d'entropie pour la conduction entre deux systèmes

Deux systèmes *(S_1)* et (S_2) ont la même capacité calorifique Γ et une grande conductivité thermique de façon à ce que l'on puisse négliger la capacité calorifique du conducteur et que la température de chaque système soit uniforme à chaque instant. L'ensemble est isolé de façon à ce qu'il n'y ait aucun échange thermique entre ce système et l'extérieur. Les deux systèmes *(S_1)* et (S_2) sont portées respectivement aux température initiales $T_{1,0}$ et $T_{2,0}$, avec $T_{1,0} > T_{2,0}$. Les deux systèmes sont reliés par un conducteur thermique de résistance thermique R_{th}.
1. Donner les lois d'évolution des températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$.
2. Donner l'expression de la variation d'entropie de *(S_1)* et de (S_2) entre l'état initial et l'état final pris par le système après uniformisation de sa température, sous forme d'intégrale du temps qu'on ne cherchera pas à calculer.
3. Exprimer la variation d'entropie du système entre l'état initial et l'instant t en fonction de $T_1(t)$ et $T_2(t)$.
4. Conclure.

Exercice 13 : Ailette de refroidissement

Pour éviter un échauffement trop important de certains appareils, on place à leur contact des ailettes de refroidissement (Fig. 1). Leur forme est parallélépipédique aplatie, d'épaisseur
a = 2,0 mm, de largeur b = 10 cm et de longueur c = 20 cm. En fonctionnement, l'appareil est maintenu à la température T_m = 60 °C. L'air extérieur, qui circule, est de température constante et uniforme T_A = 20 °C. Dans l'ailette, on admettra que le transfert thermique, de type conductif, peut être considéré comme unidimensionnel dans la direction O*x* et qu'il
obéit à la loi de Fourier, avec λ = 16 W.m^{-1}.K^{-1} . Il existe aussi un transfert thermique de l'ailette vers l'air ambiant, de nature conducto - convective. Le flux thermique entre la surface latérale *dS* (Fig. 2) de l'élément d'abscisse *x* et l'air est de la forme
$dP = h(T(x) - T_A)\,dS$, où h = 150 S*I* est une constante.



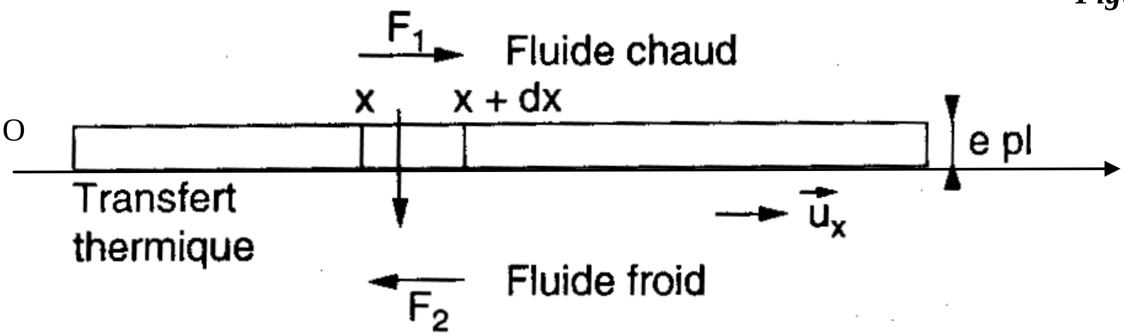
Figures

1. Expliquer la loi de Fourier et donner l'unité de h dans le système international.
2. Écrire un bilan énergétique pour la tranche d'ailette contenue entre x et $x + dx$, en régime stationnaire. On posera $L = \sqrt{\dfrac{\lambda a}{2h}}$ et on donnera la valeur numérique de L ainsi que son unité. En déduire que la température $T(x)$ vérifie l'équation différentielle suivante : $\dfrac{d^2T}{dx^2} - \dfrac{1}{L^2}T(x) = -\dfrac{1}{L^2}T_A$
3. Résoudre cette équation.
4. Comparer c et L. Conclure en simplifiant l'expression du champ de température $T(x)$
5. Donner l'expression de la puissance dP sortant de la surface latérale dS de la tranche d'ailette comprise entre x et $x+ dx$.
6. En déduire la puissance totale P évacuée par l'ailette, ainsi que sa valeur numérique.
7. Exprimer et calculer la puissance thermique P' transmise de l'appareil à l'ailette en x = 0. Conclure.
8. Combien faudrait-il d'ailettes pour évacuer un flux thermique total de 900 W ?
9. La taille de chaque ailette peut-elle être réduite sans changer notablement l'ensemble des résultats précédents ? Si oui, expliquer pourquoi et comment.

Exercice 14 : Echangeur thermique. Thermalisation d'un fluides dans une conduite

On étudie le principe d'un échangeur thermique. Il s'agit de calculer le transfert thermique entre un fluide chaud F_1 et le milieu extérieur.

Figure

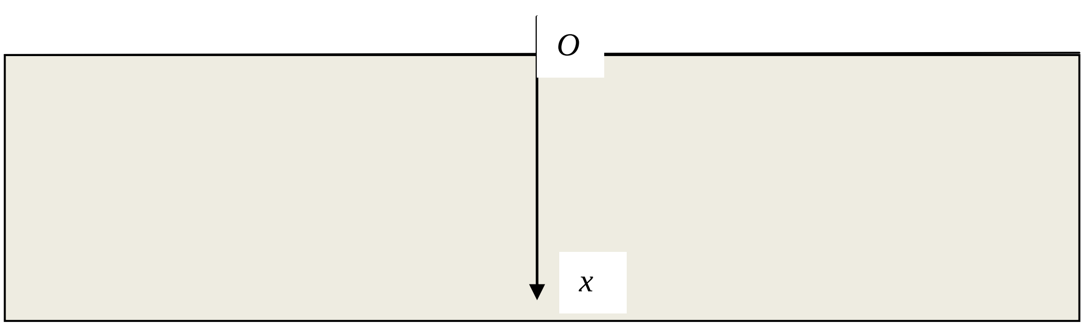


Ce transfert s'effectue à travers une plaque conductrice (voir Fig.). La plaque a une épaisseur *e*, une largeur *L (*perpendiculairement au plan de la figure) et une aire de contact *S* sur chaque face. Le matériau constituant la plaque a une conductivité thermique λ qu'on supposera constante.
On considère, pour simplifier, que F_1 et F_2 sont un même fluide, l'eau, de capacité thermique massique *c* indépendante de la température. Seul le fluide chaud F_1 circule avec un débit massique D_m. Les coefficients conducto - conductifs sur chacune des parois de la plaque ont une même valeur *h.* On note T_{ce} et T_{fe} respectivement les températures d'entrée de F_1 (fluide chaud) et de F_2 (fluide froid) et de même T_{cs} et T_{fs} leur température de sortie. On néglige le rayonnement.
Données : e = 5 mm ; h = 10 Unité SI ;coté de la plaque : a = 1 m ; λ = 10 W.m^{-1}.K^{-1} ; h = 10 W.m^{-2}.K^{-1}

1. À partir un bilan d'énergie, établir la relation en régime stationnaire :
$D_m c dT_1 = -hdS(T_1 - T_2)$ avec h tel que $\frac{1}{h} = \frac{2}{h_0} + \frac{e}{\lambda}$
2. En déduire l'équation différentielle dont $T_1(x)$ est solution.
3. Résoudre cette équation et représenter graphiquement l'allure du profil de température : $T_1(x)$.
On donne : T_{1e} = 500 K, T_2 = 300K,. Calculer T_{1s} à la sortie de la canalisation
Indiquer les profils de température à l'intérieur du fluide F_1 sachant que le fluide F_2 est homogène en température.
4. En déduire P la puissance thermique totale transférée sur toute la plaque. Exprimer P en fonction de h, S, T_2 , T_{1e}

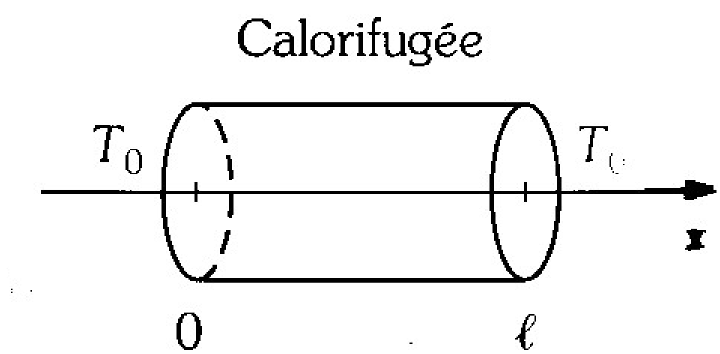
Exercice 15 : Onde de température et effet troglodyte

Le sous-sol est considéré comme un milieu semi – infini homogène de conductivité thermique λ , de masse volumique ρ , de capacité calorifique massique c, situé dans le demi-espace *x*>0. La diffusivité thermique du milieu est donnée par : D = 6 10^{-7} m^2.s^{-1}.
On suppose que la surface du sol (plan x = 0) est soumise à des variations sinusoïdales de température telles que : $T_S(t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$.



1. Quelle est la signification de T_0 ?
2. Etablir l'équation de diffusion thermique modélisant la situation décrite ci-dessus.
3. Déterminer la température $T(x,t)$ d'un point de profondeur x.
4. Représenter les variations la température $T(x,t)$ à un instant t fixé en fonction de la profondeur x. Commenter le résultat obtenu.
5. Exprimer la vitesse de propagation de l'onde thermique. Commenter.
6. On ne considère dans cette question que des variations journalières de températures, les températures variant entre 0°C la nuit et 16°C le jour. A partir de quelle profondeur les variations de températures sont-elles inférieures à 1°C ? Conclure quant à l'application de ce phénomène.
7. On considère des variations annuelles de températures moyennes annuelles entre -10 °C et 26 °C. Répondre aux mêmes questions que précédemment.

Exercice 16 : Thermalisation d'une tige



Une tige de longueur l, de section S est calorifugée latéralement (Voir Fig.). On note D le coefficient de diffusion, λ étant la conductivité thermique, ρ la masse volumique et c la capacité thermique massique de la barre.

Initialement, la température de la barre est de la forme : $T_{i,n} = T_0 + \theta_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$.

Figure

Les deux extrémités de la barre sont alors placées en contact avec un thermostat à la température T_0. On cherche à déterminer l'évolution de la température de la barre au cours du temps.

1. Que dire de la température de la barre pour des temps très longs ?
2. Établir une équation (E) aux dérivées partielles, satisfaite par la température. En déduire l'expression du coefficient de diffusion D (appelé aussi diffusivité thermique).
3. Résoudre l'équation (E) sous la forme d'une solution à variables séparées : $T(x,t) = T_0 + f(x).g(t)$. Trouver les formes de f et g compatibles avec les conditions initiales et aux limites.
4. Conclure sachant que la température initiale est $T_{i,n}(x)$.
5. Faire apparaître un temps typique d'évolution, et commenter le résultat.
6. Désormais, la température initiale est une fonction quelconque $T_i(x)$ vérifiant seulement $T_i(0) = T_i(l)$ Trouver $T(x,t)$ à l'aide des séries de Fourier. On pourra faire apparaître la série de Fourier d'une fonction impaire, de période $2l$, et identique à T_i sur l'intervalle $[0,l]$.

Exercice 17 : Détermination d'une température par spectroscopie

1. Considérons deux corps noirs dont l'un est à la température T_1 = 2500 K. Déterminer la température T_2 du second sachant que la différence entre les deux longueurs d'ondes correspondant au maxima de leur émission thermique est de 0,5 µm

Exercice 18 : Loi de Stefan - Boltzmann

On rappelle que la puissance rayonnée par unité de surface d'un corps noir est répartie sur l'ensemble des fréquences ν , selon la loi de Planck :

$$\varphi_\nu(\nu,T) = \frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

Le flux surfacique total est : $\varphi = \int_0^{+\infty} \varphi_\nu d\nu$

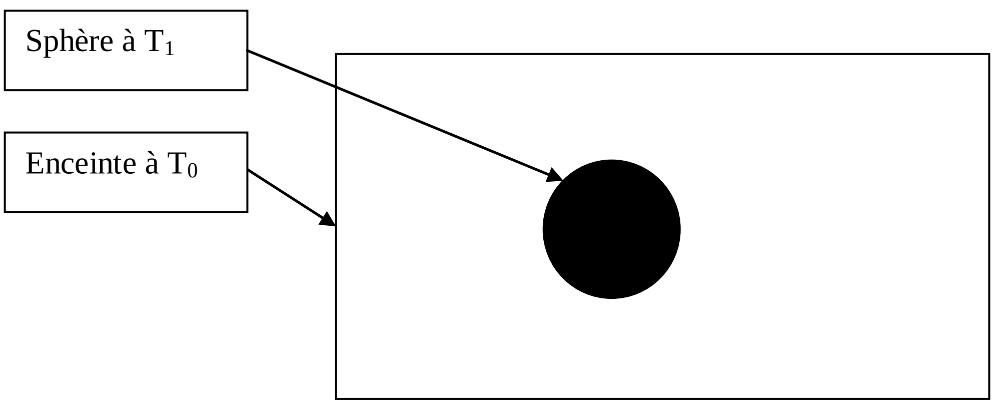
On donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

Démontrer la loi de Stefan - Boltzmann : $\varphi = \sigma T^4$, en particulier donner :

1. la valeur littérale de σ (en fonction des autres constantes universelles) ;
2. sa valeur numérique dans le système international.
3. Application : un tube radiateur infrarouge cylindrique de rayon a = 1 cm et de longueur l =30 cm rayonne une puissance de P = 1kW. Calculer sa température et sa longueur d'onde d'émission thermique maximale

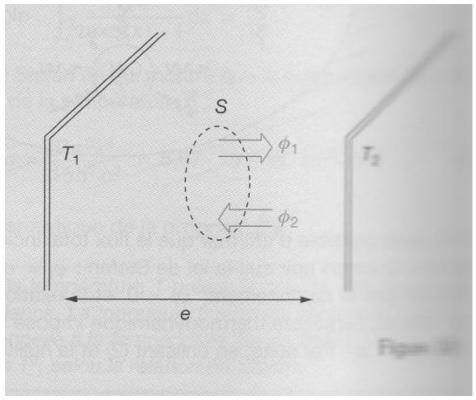
Exercice 19 : Evolution de la température d'un corps placé dans une enceinte



Un corps sphérique de rayon a de capacité thermique C_0 et de température T_1 est placé dans une enceinte vide de température T_0. On suppose que le corps sphérique rayonne comme un corps noir et que les autres transferts thermiques peuvent être négligés. On suppose que les températures T_0 et T_1 sont voisines et on peut donc poser : $T_1 = T_0 + \theta_1$ avec $\theta_1 << T_0$. On donne : T_0 = 273 K et T_1 = 280 K

1. Quel est le flux radiatif reçu par le corps sphérique uniquement de la part de l'enceinte ?
2. Quel est le flux radiatif reçu par l'enceinte de la part du corps sphérique ?
3. Quel est le flux radiatif global reçu par le corps sphérique ?
4. Montrer que l'on peut linéariser ce flux thermique et introduire une résistance thermique équivalente.
5. Déterminer la loi d'évolution de la température T_1 de la sphère en fonction du temps. La valeur initiale de la température est T_{10} = 280 K. Identifier un temps caractéristique de thermalisation.
6. Application numérique : On considère une sphère de rayon a = 1 cm, de capacité thermique massique c_0 = 500 J.kg^{-1}.K^{-1} et de masse volumique ρ =7,8 10^3 kg.m^{-3}. Au bout de combien de temps l'écart en température entre la sphère et l'enceinte est-il inférieur à 0,1 K ?

Exercice 20 : Ecrans radiatifs



Deux plans métalliques parallèles sont assimilés à des corps noirs de températures respectives T_1 et T_2 uniformes. L'espace les séparant, d'épaisseur e est vide (Fig. 10).

1. Justifier qu'un transfert thermique ait lieu entre les écrans, quelle est sa direction ?
2. Exprimer le flux thermique échangé par deux surfaces en regard, espacée d'une longueur e et de même aire S.
3. Si les valeurs de températures sont proches, montrer qu'un modèle conductif équivalent peut être proposé. Peut-on alors définir une résistance thermique associé à un flux radiatif de transfert thermique ? Que remarque-t-on sur la conductivité thermique ainsi définie ?

Exercice 21 : Régulation du chauffage d'une habitation

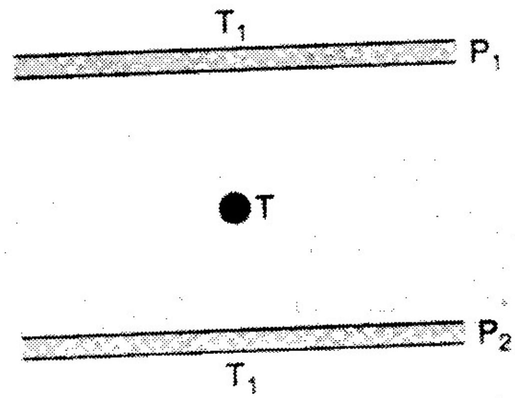
On considère une habitation de capacité thermique C soumise à un afflux de puissance thermique P(t) apportée par une source de chauffage interne à l'habitat. On désigne par R la résistance thermique des parois en béton de conductivité λ = 10 W.m^{-1}.K^{-1} . La température extérieure est notée T_{ext}. Et celle de l'habitation T

On suppose pour simplifier que l'habitation est soumise à l'évacuation d'un flux thermique isotrope. On pourra la modéliser par un volume parfaitement sphérique de rayon R = 10 m, le transfert thermique s'effectuant dans un sens localement perpendiculaire à la paroi.

On donne le coefficient des échanges conducto-convectifs : $h = 10$ W.m^{-2}.K^{-1}

1. Schématiser la situation. Faire apparaitre les transferts thermiques.
2. Calculer la résistance thermique R_c due à la conduction à travers l'enceinte.
3. Déterminer la résistance thermique R_{cv} due aux échanges conducto-convectifs .
4. Déterminer la résistance thermique R_r du au rayonnement.
5. Quelle est la résistance thermique totale R du bâtiment ?
6. Effectuer un bilan d'énergie global à l'échelle de l'habitation.
7. En déduire que la température de l'habitat suit une loi solution de l'équation différentielle : $\tau \frac{dT}{dt} + T = T_{ext} + g(t)$. Identifier τ en fonction de la résistance R et de la capacité thermique C . Identifier la fonction $g(t)$ en fonction de $P(t)$ et de la résistance R.
8. La température extérieure est soumise à des variation sinusoïdales de température : $T_{ext}(t) = T_0 + \theta_M \cos(2\pi\ f\ t)$. Que peut représenter la loi d'évolution $T_{ext}(t)$? Que représente f ? En déduire une estimation numérique de f.
9. Déterminer la puissance de chauffe P pour stabiliser la température autour de 20 °C si :
   - T_0 =10°C et $\theta_M = 0°C$.
   - T_0 =10°C et $\theta_M = 5°C$.

Exercice 22 : Température d'équilibre d'une sphère noire



Une sphère noire de rayon r et de petites dimensions est placée entre deux plaques P_1 et P_2 opaques dont les parois sont à une même température T_1. Le milieu ambiant est, un gaz transparent au rayonnement de sorte que ce dernier et en équilibre avec les plaques, la sphère ne perturbant pas (par son rayonnement propre) l'équilibre précédent. La sphère et supposée pleine et homogène (de chaleur massique c et de masse volumique μ Elle est supposée à chaque instant, isotherme. Les échanges de type conducto - convectif avec le milieu ambiant sont supposés négligeables. Les échanges énergétiques se réduisent dans ce cas au seul rayonnement. La température initiale de la sphère est T_0. On désignera par T sa température.

1 . On supposera que : $\frac{T_0 - T_1}{T_1} << 1$.Exprimer le flux surfacique radiatif à la surface de la sphère. On introduira la température moyenne $T_m = \frac{T_0 + T_1}{2}$

2. Ecrire l'équation différentielle qui régit l'évolution temporelle de la température de la sphère.

Introduire puis calculer une constante de temps. A.N. $\mu = 2{,}7\ 10^3$ kg.m^{-3} ; c = 910 J.kg^{-1}.K^{-1} ;

la sphère a une masse m = 0,12 kg ; T_0 = 283 K et T_1 = 273 K

3. Le milieu entre les plaques est maintenant un gaz transparent de température moyenne Tf dans la partie centrale. Le gaz s'écoule parallèlement aux plaques d'où il résulte des échanges thermiques conducto – convectifs. Pour la sphère, le coefficient de transfert conducto - convectif est h. On suppose toujours qu'il y a équilibre du rayonnement avec les plaques du fait de la transparence du gaz. Trouver l'équation donnant la température T de la sphère en régime stationnaire. Y a-t-il équilibre radiatif pour la sphère ? Y a-t-il équilibre radiatif pour le système global ?

4. Calculer numériquement T pour T_1 = 473 K et T_f = 800 K ; h = 100 W.m^{-2}.K^{-1} (convection forcée)

Commenter le résultat.