

# Oscillateurs à pont de Wien

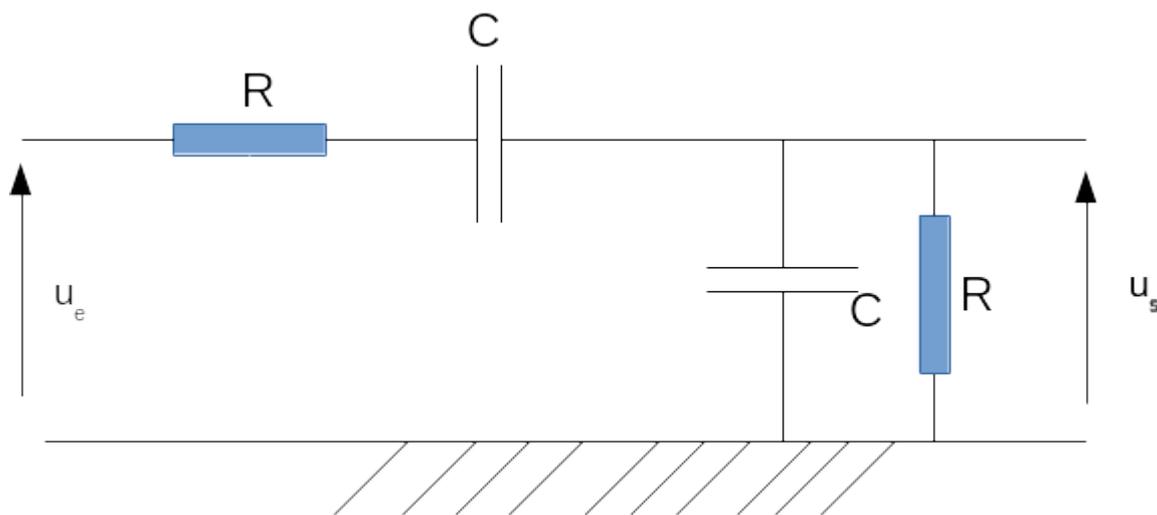
## I Principe

Pour obtenir cet oscillateur, on associe un filtre passe bande, c'est à dire un filtre qui sélectionne une bande de fréquences centré sur une fréquence de transmittance maximale  $f_0$  avec un amplificateur. On forme une boucle. La sortie du filtre est branchée sur l'entrée de l'amplificateur, tandis que l'entrée de l'amplificateur est branchée sur l'entrée du filtre.

Ici on utilise donc un filtre de Wien et un amplificateur non inverseur.

## II Filtre de Wien

### 1 Schéma :



$u_e$  et  $u_s$  sont les tension d'entrée et de sortie. En régime sinusoïdal forcé, on a :

- $u_e(t) = E \cdot \cos(\omega \cdot t)$
- $u_s(t) = S \cdot \cos(\omega \cdot t + \Phi)$

$E$  et  $S$  sont les amplitudes, ou valeurs maximales, en volt.  $\omega$  est la pulsation, en  $\text{rad/s}^1$ , et on rappelle que  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ , ou  $f$  est la fréquence du signal, en Hz.

$\Phi$  est le déphasage, exprimé ici en radians<sup>2</sup>.

Ces deux tensions peuvent être vues comme des objets mathématiques à 2 dimensions et donc être exprimées en écriture complexe.

N.B. : en mathématique, le nombre imaginaire pur est noté  $i$ , tel que  $i^2 = -1$ . En physique, pour ne pas le confondre évidemment avec l'expression coutumière de l'intensité du courant électrique souvent noté  $i(t)$ , on utilisera plutôt la notation  $j$ , tel que  $j^2 = -1$

- $\underline{u_e}(t) = E \cdot e^{(j \cdot \omega \cdot t)}$
- $\underline{u_s}(t) = S \cdot e^{j(\omega \cdot t + \Phi)}$

1 donc analogue à une vitesse angulaire

2 On rappelle que  $(\omega \cdot t + \Phi)$  doit avoir la dimension d'un angle, donc doit pouvoir être exprimé en rad ou en deg

L'impédance, souvent notée  $Z$ , est le prolongement de l'idée de résistance en courant alternatif.

On a donc  $Z = \frac{U}{I}$  où  $U$  et  $I$  sont les valeurs efficaces de la tension et du courant, et  $Z$  le module de l'impédance.  $Z$  s'exprime aussi en ohms ( $\Omega$ ), comme la résistance.

En écriture complexe, l'impédance est aussi un objet à deux dimensions, puisqu'il inclut son module, et aussi le déphasage que produit le dipôle d'impédance  $Z(Z, \Phi)$

Et on a  $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$

## 2 Étude théorique du filtre

### a Comportement qualitatif suivant la fréquence.

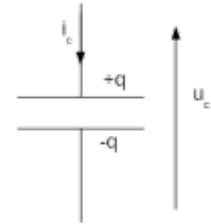
Rappel sur le condensateur :

La formule de base du condensateur est  $q = C \cdot u_c$

$q$  charge électrique en coulombs (C)

$C$  capacité du condensateur en farads (F)

$u_c$  tension aux bornes du condensateur en volts (V)



Le courant électrique est la variation de la charge électrique, donc il peut être exprimé par la dérivée de la charge électrique.  $i = \frac{dq}{dt}$

Dans le cas du condensateur on a :  $i = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du_c}{dt}$

En écriture complexe on peut montrer que dériver une fonction sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , peut revenir à multiplier la fonction par  $j\omega$  au déphasage près.

$$\frac{d[A \cdot \cos(\omega \cdot t)]}{dt} = -A \cdot \omega \sin(\omega \cdot t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) \quad \text{ou}$$

$$\frac{d[A \cdot e^{(j \cdot \omega \cdot t)}]}{dt} = A \cdot j \cdot \omega \cdot e^{(j \cdot \omega \cdot t)} = A \cdot \omega \cdot e^{(j \cdot \omega \cdot t + \frac{\pi}{2})} \quad \text{puisque } j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Donc on a  $i = C \cdot \frac{du_c}{dt} = j \cdot \omega \cdot C \cdot u_c$

On applique la définition de l'impédance.  $\underline{Z}_c = \frac{u_c}{i} = \frac{1}{j \cdot C \cdot \omega}$

Ce qui donne en module :  $Z_c = \frac{1}{C \cdot \omega} = \frac{1}{C \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$

#### Comportement à basse fréquence.

Si  $f \rightarrow 0 \text{ Hz}$  alors  $Z_c \rightarrow \infty$

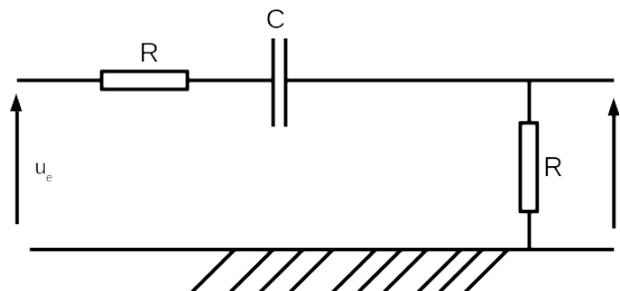
À très basse fréquence, les condensateurs sont comme des coupe-circuit.

On pourra donc négliger l'influence du deuxième condensateur menant à la terre, en parallèle avec la résistance en sortie du filtre.

La tension est presque entièrement aux bornes du condensateur en série, qui a une très forte impédance.

On a un pont diviseur de tension, et la tension de sortie est petite.

$$u_s \approx u_e \cdot \frac{R}{Z_c} \approx u_e \cdot R \cdot C \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$$



### Comportement à très haute fréquence.

Si  $f \rightarrow \infty$  alors  $Z_c \rightarrow 0 \Omega$

À très haute fréquence, le condensateur est comme un court circuit. Il laisse facilement passer le signal.

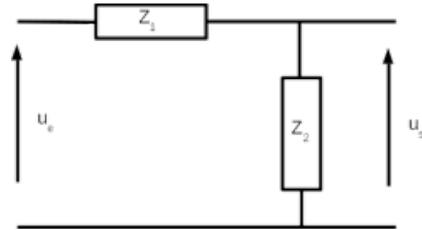
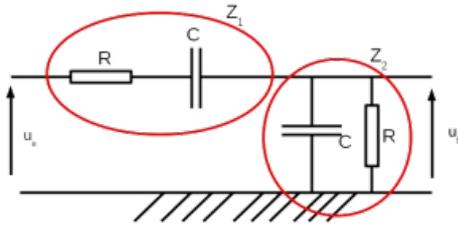
La tension  $u_s$  tend aussi vers zéro.

On a donc un filtre qui atténue les signaux à haute et basse fréquence.

### b Fonction de transfert théorique

On utilise une logique de pont diviseur.

Le filtre est divisé en deux impédances d'expression complexes  $Z_1$  et  $Z_2$ .  $Z_1$  est équivalente à R et C en série, tandis que  $Z_2$  est équivalente à R et C en parallèle.



- **Expression complexe de  $Z_1$ :**

Les dipôles sont en série  $Z_1 = R \oplus C$

Donc  $Z_1 = Z_R + Z_C$

$$\boxed{Z_1 = R + \frac{1}{j \cdot C \cdot \omega}}$$

- **Expression complexe de  $Z_2$**

Les dipôles sont en parallèle (ou dérivation).  $Z_2 = R \parallel C$

$$\text{Donc } \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} \quad \text{ou} \quad Z_2^{-1} = ((Z_R)^{-1} + (Z_C)^{-1})^{-1}$$

Donc :

$$\boxed{\frac{1}{Z_2} = \left( R^{-1} + \left( \frac{1}{j \cdot C \cdot \omega} \right)^{-1} \right) = \left( \frac{1}{R} + j \cdot C \cdot \omega \right)}$$

- **Expression complexe de la fonction de transfert :**

$$\boxed{H(\omega) = \frac{u_s}{u_e}}$$

Puisque l'on a un pont diviseur de tension, cela revient à :

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\frac{Z_1}{Z_2} + 1}$$

On remplace  $Z_1$  et  $\frac{1}{Z_2}$  par leurs expressions.

$$H(\omega) = \frac{1}{\left( R + \frac{1}{j \cdot C \cdot \omega} \right) \times \left( \frac{1}{R} + j \cdot C \cdot \omega \right) + 1}$$

On développe :

$$H(\omega) = \frac{1}{\left(\frac{R}{R} + \frac{1}{j \cdot C \cdot R \cdot \omega} + j \cdot R \cdot C \cdot \omega + \frac{j \cdot C \cdot \omega}{j \cdot C \cdot \omega}\right) + 1}$$

On peut donc simplifier en :

$$H(\omega) = \frac{1}{\left(3 + j \cdot R \cdot C \cdot \omega + \frac{1}{j \cdot R \cdot C \cdot \omega}\right)}$$

Si on pose que  $\omega_0 = \frac{1}{R \cdot C}$  on obtient :

$$H(\omega) = \frac{1}{\left(3 + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$$

### 3 Diagramme de Bode théorique

#### a Gain en dB.

$$G_{DB} = 20 \log(H)$$

On exprime le module de  $\underline{H}$ .

$$\|H(\omega)\| = \frac{1}{\|3 + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\|} = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \left(9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)^{-1/2}$$

$$G_{DB} = -10 \cdot \log\left(9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)$$

→ Si  $\omega = \omega_0$  alors  $G_{DB} = -10 \cdot \log(9) \approx -21,972246 \approx -22$

→ Si  $\omega \ll \omega_0$  ou  $\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  alors L'expression du gain devient proche de

$$G_{DB} = -10 \cdot \log\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right) = -20 \cdot \log(\omega_0) + 20 \cdot \log(\omega)$$

On a donc une pente croissante à 20 dB/décade

→ Si  $\omega_0 \ll \omega$  ou  $\omega \rightarrow \infty$  alors L'expression du gain devient proche de

$$G_{DB} = -10 \cdot \log\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) = -20 \cdot \log(\omega) + 20 \cdot \log(\omega_0)$$

On a une pente décroissante à -20dB/décade

#### b Phase :

Si  $H(\omega) = \frac{1}{\left(3 + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$  alors on peut l'écrire sous la forme :  $\underline{H}(\omega) = \frac{\left(3 - j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}{\left(9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)}$

La tangente de la phase est égale à :  $\tan(\Phi) = \frac{(\text{partie imaginaire})}{(\text{partie réelle})}$

$$\tan(\Phi) = \frac{-(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}{3} \quad \text{donc} \quad \Phi = \arctan \frac{(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0})}{3}$$

Si  $\omega = \omega_0$  alors  $\Phi = 0 \text{ rad}$

Si  $\omega \ll \omega_0$  ou  $\omega \rightarrow 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  alors  $\tan(\Phi) \rightarrow +\infty$  et  $\Phi \rightarrow +\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Si  $\omega_0 \ll \omega$  ou  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $\tan(\Phi) \rightarrow -\infty$  et  $\Phi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

## 4 Application numérique

Si  $R = 10 \text{ k}\Omega = 10 \cdot 10^3 \Omega$  et  $C = 10 \text{ nF} = 10 \cdot 10^{-9} \text{ F}$  alors on a la pulsation

$$\omega_0 = \frac{1}{10 \cdot 10^3 \times 10 \cdot 10^{-9}} = 1 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et pour la fréquence} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} \quad \text{donc}$$

$$f_0 = \frac{1 \cdot 10^4}{2 \cdot \pi} = 1591,55 \text{ Hz} \quad \text{Que l'on peut arrondir à :}$$

$$f_0 = 1,59 \text{ kHz}$$

Et :  $-20 \cdot \log(\omega_0) = -20 \cdot \log(10^4) = -80$

## 5 Tracé avec Scilab

Scilab peut tracer les diagrammes de Bode si la fonction de transfert est présentée comme une fraction de fonctions polynomiale sous la forme de Laplace, en « p ».

On reprend l'expression de la fonction de transfert  $H(\omega) = \frac{1}{(3 + j \cdot (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}))}$  que l'on met sous

la forme de Laplace avec  $p = j \cdot \omega$  et  $\tau_0 = \frac{1}{\omega_0}$

Remarque :  $-j = \frac{1}{j}$  donc  $-j \cdot \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega_0}{j \cdot \omega} = \frac{1}{p \cdot \tau_0}$

$$H(p) = \frac{1}{3 + (p \cdot \tau_0 + \frac{1}{p \cdot \tau_0})}$$

Que l'on met sous une forme polynomiale en multipliant par p au numérateur et au dénominateur.:

$$H(p) = \frac{p}{\frac{1}{\tau_0} + 3 \cdot p + \tau_0 \cdot p^2}$$

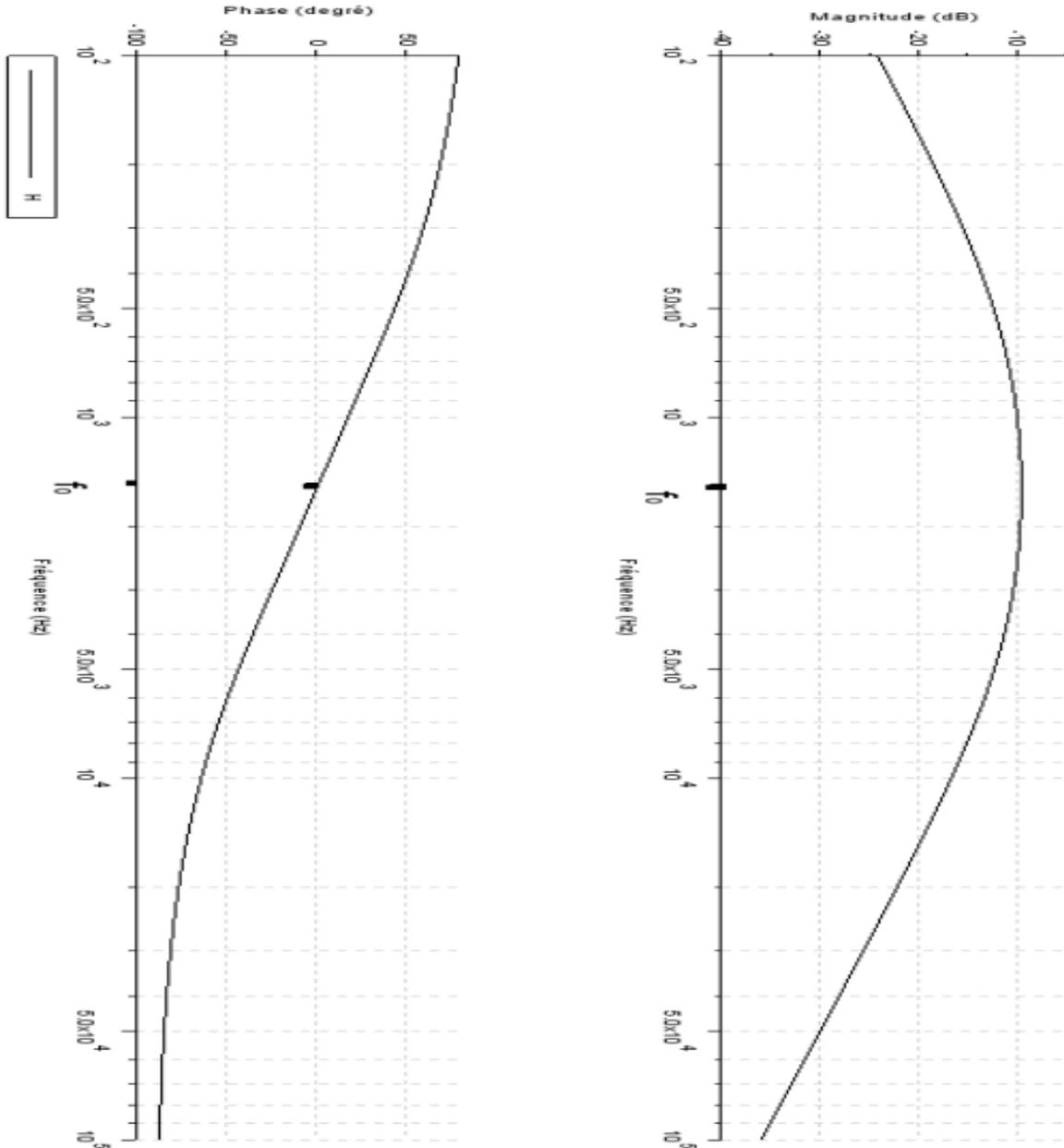
On définit maintenant les deux polynômes numérateur et dénominateur dans la console de Scilab

```
--> num1=poly([0 1], 'p', 'c'); // numérateur de la fonction de transfert
```

```
--> den1=poly([omega0 3 1/omega0], 'p', 'c'); // dénominateur de la fonction de transfert
```

```
--> H_p1 = syslin('c',num1,den1); // définition de la fonction de transfert comme système dynamique linéaire
```

```
--> bode(H_p1,100,100000,'H'); // Tracer les diagrammes de Bode sur l'intervalle de valeur [100 ; 100 000].
```

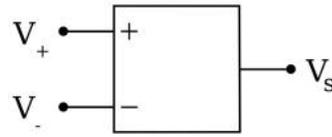


Le résultat montre bien un filtre passe bande avec un maximum à  $f_0$ .  
À cette fréquence on remarque que le déphasage est nul.

### III Amplificateur non inverseur.

#### 1 L'amplificateur opérationnel

Ce montage utilise un circuit intégré appelé « amplificateur opérationnel »<sup>3</sup>. Le schéma conventionnel de ce composant est :



Pour des raisons pratiques, afin de faciliter le troisième schéma de circuit, on inversera sur le dessin les entrées + et -.<sup>4</sup>

L'amplificateur opérationnel est fragile. Il doit être alimenté par une source d'énergie fournissant les tensions + 15 V, 0 V (Masse), et -15 V. **Attention** à ne pas inverser l'alimentation ! Il y a risque de destruction fumante et crépitante du composant. *Ce peut même être risqué pour les yeux.*

#### 2 Montage

On utilise une résistance  $R_1 = 10\text{ k}\Omega$ , et une résistance  $R_2$  réglable entre 0 et  $100\text{ k}\Omega$ , appelée aussi « potentiomètre ».

On peut démontrer que le gain de ce montage est :

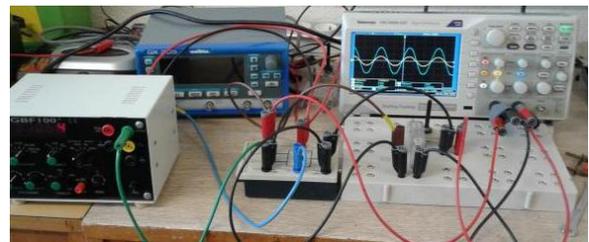
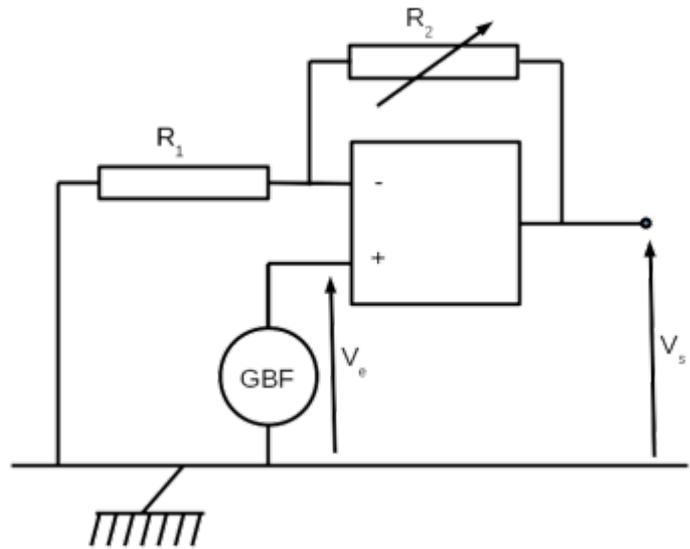
$$A = \frac{V_s}{V_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Les composants  $R_1$  et  $R_2$  sont passifs. Ils n'emmagasinent pas, ou ne fournissent pas d'énergie électrique. Ils n'introduisent donc pas de retard ou d'avance du signal, c'est à dire pas de déphasage.

On peut vérifier cela aisément.

Il est donc possible de régler la valeur du gain  $g$  à l'aide de  $R_2$ .

Si  $R_2 = 2 \cdot R_1$ , alors il est évident que  $g = 3$



<sup>3</sup> Ne pas confondre le composant intégré dans un petit boîtier noir « amplificateur opérationnel », et le montage complet « amplificateur non inverseur » qui l'utilise.

<sup>4</sup> Si c'est pour la bonne cause on a le droit.

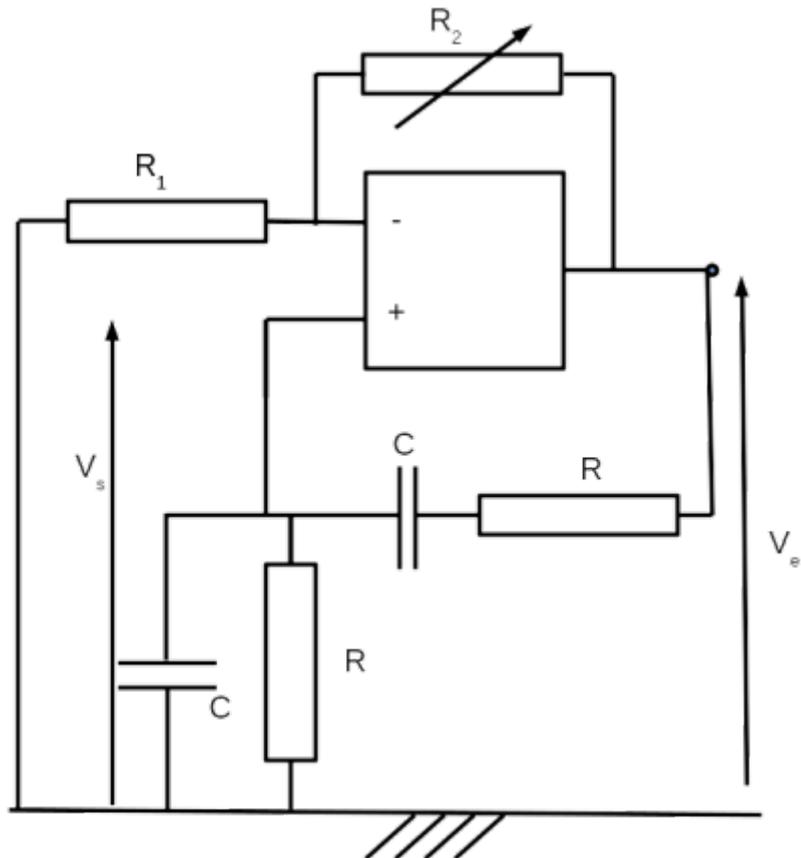
## IV Oscillateur

### 1 Montage

Les deux montages sont assemblés de manière à ce que la sortie du filtre soit injectée dans l'entrée de l'amplificateur, et la sortie de l'amplificateur dans l'entrée du filtre.

On a un montage en boucle fermée, qui est fourni en énergie par l'alimentation [+15 V ; -15 V] du circuit intégré.

On garde les notations  $v_e$  et  $v_s$  du filtre de Wien.



### 2 Modélisation

Ce montage peut être représenté de la manière schématique suivante :

On a une boucle fermée où le signal de sortie du filtre est envoyé dans l'entrée de l'amplificateur non inverseur, et où la sortie de l'amplificateur est ré-injectée dans l'entrée du filtre.



Donc l'amplificateur donne comme équation (1) :

$$v_e(t) = A \cdot v_s(t)$$

Le filtre donne l'équation (2) vue précédemment :

$$\frac{v_s(t)}{v_e(t)} = \frac{1}{\left(3 + j \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$$

$$\frac{v_s(t)}{v_e(t)} = \frac{1}{\left(3 + \frac{j \cdot \omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{j \cdot \omega}\right)}$$

$$\frac{v_s(t)}{v_e(t)} = \frac{\frac{j \cdot \omega}{\omega_0}}{\left(1 + 3 \cdot \frac{j \cdot \omega}{\omega_0} + \left(\frac{j \cdot \omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

$$\underline{v}_s(t) \times \left( 1 + 3 \cdot \frac{j \cdot \omega}{\omega_0} + \left( \frac{j \cdot \omega}{\omega_0} \right)^2 \right) = \underline{v}_e(t) \times \frac{j \cdot \omega}{\omega_0}$$

On rappelle qu'en expressions complexes de grandeurs sinusoïdales, dériver revient à multiplier par  $j \cdot \omega$ . Donc dériver deux fois revient à multiplier par  $(j \cdot \omega)^2$ .

Ce qui donne l'équation différentielle :

$$\underline{v}_s(t) + \frac{3}{\omega_0} \frac{d\underline{v}_s(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 \underline{v}_s(t)}{dt^2} = \frac{d\underline{v}_e(t)}{dt} \times \frac{1}{\omega_0}$$

Pour éliminer  $v_e(t)$ , on injecte l'équation (1). On remplace  $v_e$  par  $A \cdot v_s$

$$\underline{v}_s(t) + \frac{3}{\omega_0} \frac{d\underline{v}_s(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 \underline{v}_s(t)}{dt^2} = \frac{d\underline{v}_s(t)}{dt} \times \frac{A}{\omega_0}$$

Les termes sont regroupés pour obtenir l'équation différentielle sur  $v_s(t)$ .

$$\underline{v}_s(t) + \frac{(3-A)}{\omega_0} \frac{d\underline{v}_s(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 \underline{v}_s(t)}{dt^2} = 0$$

Discussion sur la valeur de l'amplification  $A$ .

On a une équation différentielle du second ordre. Suivant la valeur du coefficient  $\frac{3-A}{\omega_0}$  on obtiendra différents comportements. Soit un système oscillant amorti avec une enveloppe exponentielle inverse, soit un système divergent, limité par les capacités de l'amplificateur, soit un système oscillant pur.

Pour obtenir ce dernier cas, celui qui nous intéresse, il faut que le coefficient du premier ordre soit nul, donc que  $A = 3$ . L'équation différentielle devient alors :

$$\underline{v}_s(t) + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 \underline{v}_s(t)}{dt^2} = 0$$

Dont une solution possible est  $v_s(t) = S \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \Phi)$

## V Conclusion

On aura la résonance de ce système bouclé pour à fréquence de transmission maximale du filtre. Ce qui n'est pas étonnant. Au début l'agitation thermique produit un « bruit de fond » électronique pouvant être décrit comme un paquet de très nombreux signaux de fréquences diverses.

L'amplification du signal de fréquence  $f_0$  est privilégiée par rapport aux autres par le filtre de Wien.

Matériellement, si on veut obtenir  $A = 3$ , il faut et il suffit que  $R_2 = 2 \cdot R_1$  puisque  $A = 1 + \frac{R_2}{R_1}$